模块一 立体图形的结构探究

第 1 节 几何体的表面积与体积（★★）

内容提要

本节涉及空间几何体的表面积和体积计算，下面先梳理一些必备公式.

1．多面体的表面积与体积（表面积即各个面的面积之和，没有统一的公式）

①棱锥的体积：$V=\dfrac{1}{3}Sh$；②棱柱的体积：$V=Sh$；③棱台的体积：$V=\dfrac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})h$.

2．旋转体的表面积与体积

①圆柱：如图 1，体积 $V=Sh=\pi r^2h$，侧面积 $S_{侧}=2\pi rh$，表面积 $S=2\pi rh+2\pi r^2$；

②圆锥：如图 2，体积 $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$，侧面积 $S_{侧}=\pi rl$，表面积 $S=\pi rl+\pi r^2$；

③圆台：如图 3，体积 $V=\dfrac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})h=\dfrac{\pi}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)h$，侧面积 $S_{侧}=\pi(r_1+r_2)l$；

表面积 $S=\pi(r_1+r_2)l+\pi r_1^2+\pi r_2^2$；

④球：如图 4，体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，表面积 $S=4\pi R^2$.

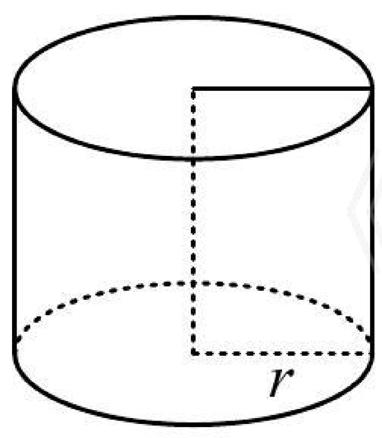


图1

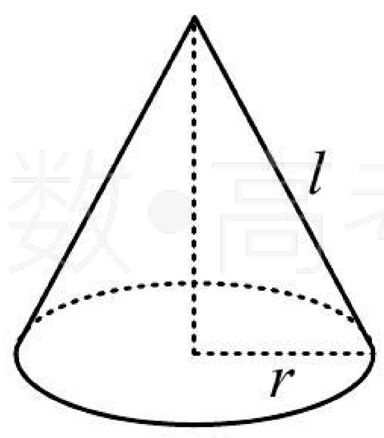


图2

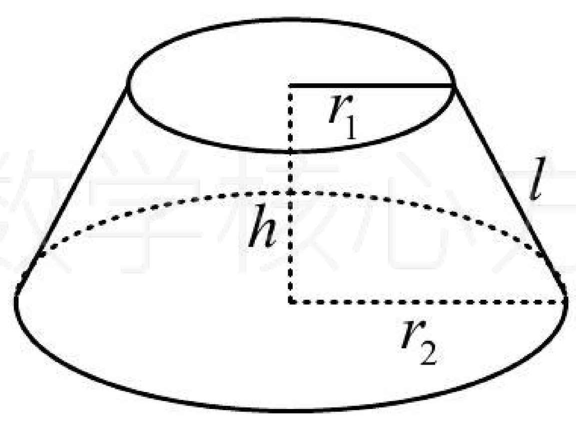


图3

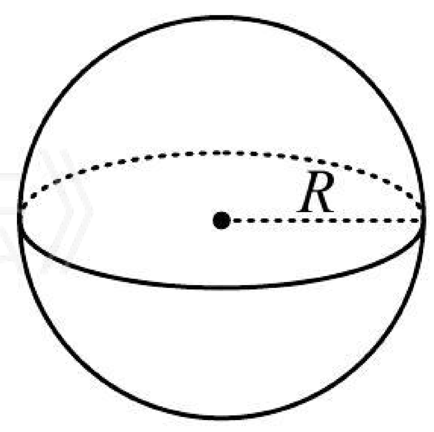


图4

典型例题

类型Ⅰ：简单几何体的表面积与体积

【例 1】底面积为 2π，侧面积为 6π 的圆锥的体积是（　　）

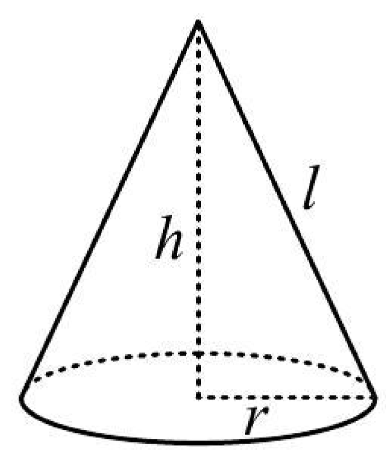
（A）8π　　（B）$\dfrac{8\pi}{3}$　　（C）2π　　（D）$\dfrac{4\pi}{3}$

解析： 要算圆锥体积，已有底面积，只需求出高，可由所给条件建立关键参数的方程组，

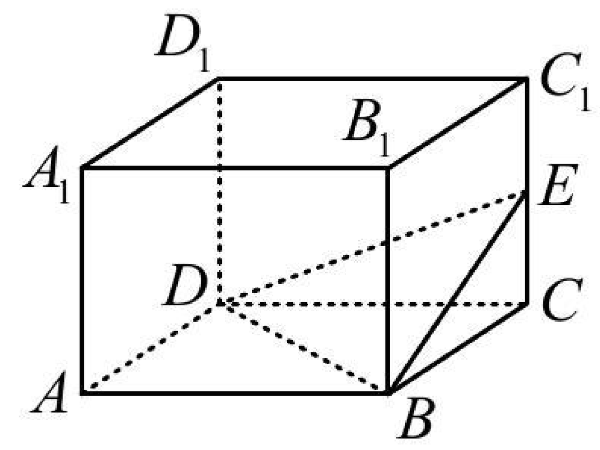
如图，圆锥的底面积 $S=\pi r^2=2\pi\Rightarrow r=\sqrt{2}$，圆锥的侧面积 $S'=\pi rl=\sqrt{2}\pi l=6\pi\Rightarrow$ 母线长 $l=3\sqrt{2}$，

所以圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=4$，故体积 $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\times 2\pi\times 4=\dfrac{8\pi}{3}$.

答案： B



【例 2】(2019 •江苏卷）如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 120，E 为 CC_1 的中点，则三棱锥 $E-BCD$ 的体积是_____.



解析：由图可知用长方体的长、宽、高能方便地表示 V_{E-BCD}，故而找到二者的体积关系，

设 $AB=x$， $BC=y$， $CC_1=z$，则长方体的体积 $V=xyz=120$，

所以 $V_{E-BCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot CE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}xy\times\frac{z}{2}=\frac{xyz}{12}=10$.

答案：10

【例 3】(2022 • 新高考Ⅰ卷）南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5m 时，相应水面的面积为 140.0km^2；水位为海拔 157.5m 时，相应水面的面积为 $180.0\ \text{km}^2$. 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5m 上升到 157.5m 时，增加的水量约为（　　）（$\sqrt{7}\approx 2.65$）

（A）$1.0\times10^9\text{m}^3$　　（B）$1.2\times10^9\text{m}^3$　　（C）$1.4\times10^9\text{m}^3$　　（D）$1.6\times10^9\text{m}^3$

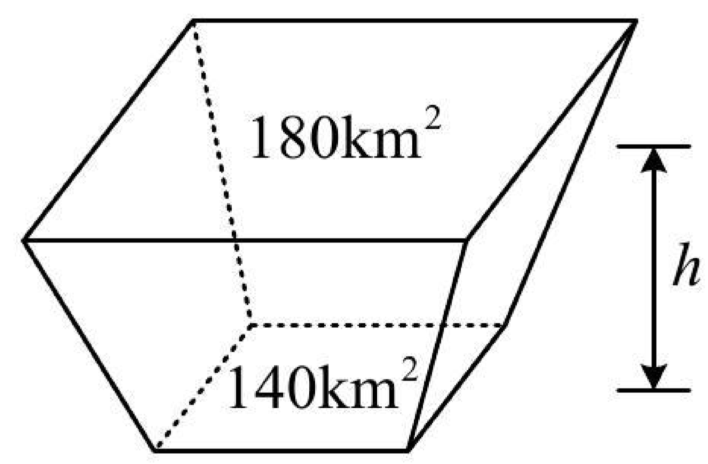
解析：算棱台的体积，代公式即可，先找到 S 和 S'，以及棱台的高 h，

如图，该棱台的两个底面面积分别为 $S=140\text{km}^2$， $S'=180\text{km}^2$，高 $h=157.5-148.5=9\text{m}=9\times10^{-3}\text{km}$，

所以棱台的体积 $V=\frac{1}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})h=\frac{1}{3}\times(140+180+\sqrt{140\times180})\times9\times10^{-3}\text{km}^3$

$=3\times(320+60\sqrt{7})\times10^{-3}\text{km}^3\approx3\times(320+60\times2.65)\times10^{-3}\text{km}^3=1.437\text{km}^3\approx1.4\times10^9\text{m}^3$.

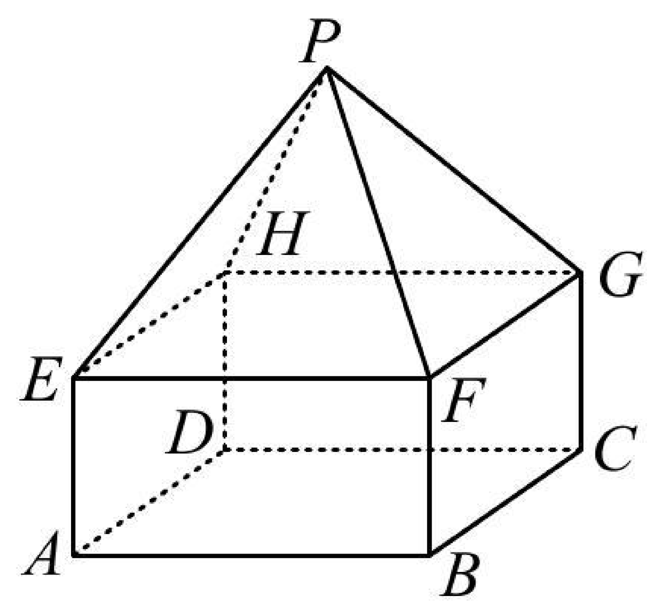
答案：C



【总结】对于简单几何体的表面积与体积，把该几何体的关键参数代入内容提要对应公式计算即可.

类型Ⅱ：组合体的表面积与体积

【例 4】某组合体如图所示，上半部分是正四棱锥 $P-EFGH$，下半部分是长方体 $ABCD-EFGH$，$EF=2$，$AE=1$， $PF=\sqrt{5}$，则该组合体的表面积为_____.



解析：正四棱锥的底面 $EFGH$ 是正方形，侧面为四个全等的等腰三角形，故不妨算 $S_{\Delta PFG}$，

如图，取 FG 中点 I，连接 PI，则 $PI\perp FG$，由题意，$EFGH$ 是边长为 2 的正方形，所以 $FI=1$，

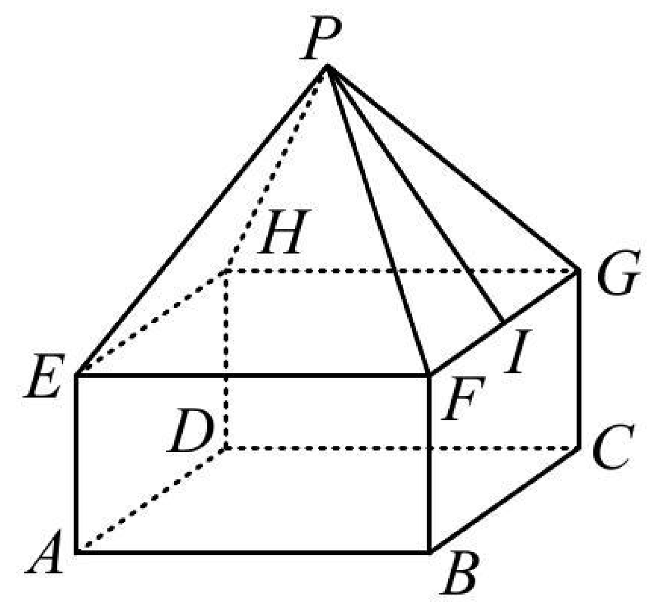
又 $PF=\sqrt{5}$，所以 $PI=\sqrt{PF^2-FI^2}=2$，故 $S_{\Delta PFG}=\dfrac{1}{2}FG\cdot PI=2$，

还要算长方体的五个面，$ABCD$ 是与 $EFGH$ 全等的正方形，其余四个面是全等的矩形，

因为 $AE=1$，$EF=2$，所以 $S_{ABFE}=EF\cdot AE=2\times 1=2$，又 $AB=EF=2$，所以 $S_{ABCD}=2\times 2=4$，

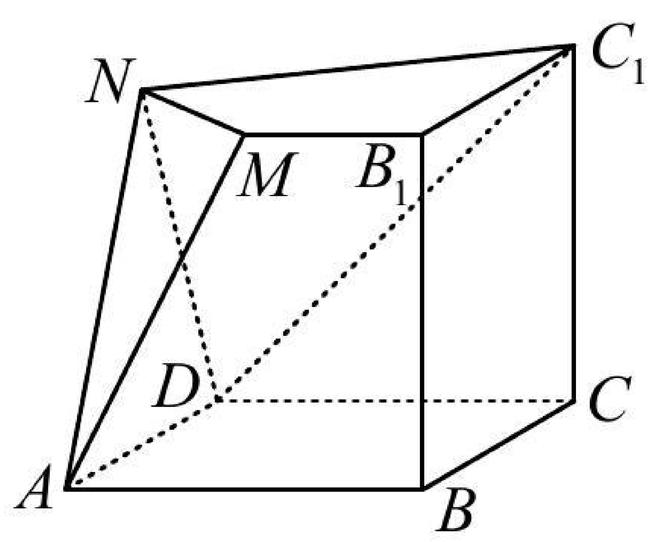
故该组合体的表面积为 $S=4S_{\Delta PFG}+4S_{ABFE}+S_{ABCD}=4\times 2+4\times 2+4=20$.

答案：20



【变式】如图是一个棱长为 2 的正方体被过棱 A_1B_1，A_1D_1的中点 M，N，顶点 A 和过点 N，顶点 D，C_1 的两个截面截去两个角后所得的几何体，则该几何体的体积为（　　）

（A）5　（B）6　（C）7　（D）8



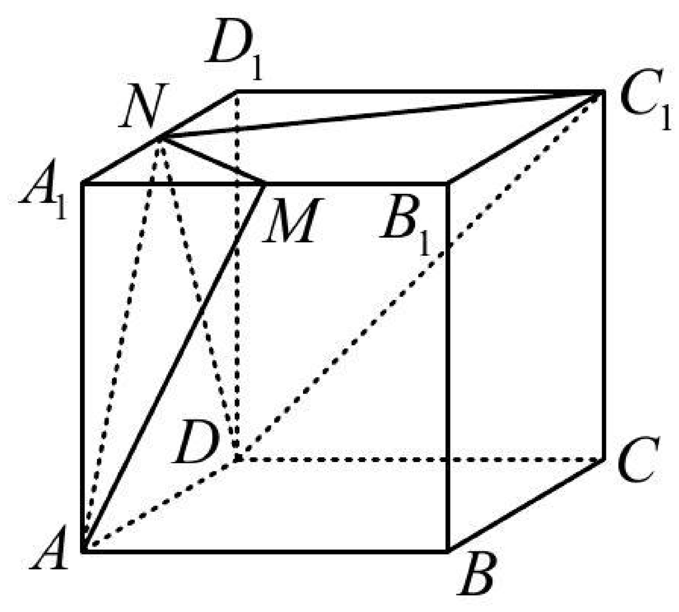
解析：所给几何体由正方体截得，故先画出完整的正方体，再看怎样算体积，

如图，截去的部分是三棱锥 $A-A_1MN$ 和 $D-C_1D_1N$，正方体的体积 $V=2^3=8$，

$V_{A-A_1MN}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta A_1MN}\cdot AA_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times 2=\dfrac{1}{3}$，$V_{D-C_1D_1N}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta C_1D_1N}\cdot DD_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 1\times 2=\dfrac{2}{3}$，

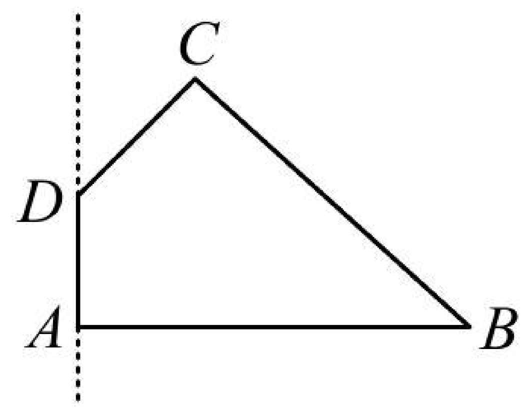
故所求几何体的体积为 $8-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}=7$.

答案：C



【例 5】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\perp AB$，$\angle ADC=135^{\circ}$，$AB=3$，$CD=\sqrt{2}$，$AD=1$，则四边形 $ABCD$ 绕 AD 旋转一周所成几何体的表面积为（　　）

（A）$(6+4\sqrt{2})\pi$　　（B）$(9+4\sqrt{2})\pi$　　（C）$(9+9\sqrt{2})\pi$　　（D）$(9+10\sqrt{2})\pi$



解析：原图形绕 AD 旋转一周得到的几何体如图，它是一个圆台在上方挖去了一个圆锥后余下的部分，该组合体的表面积由三部分构成，下方的圆，中间圆台的侧面，上方挖去的圆锥的侧面，需分别计算，

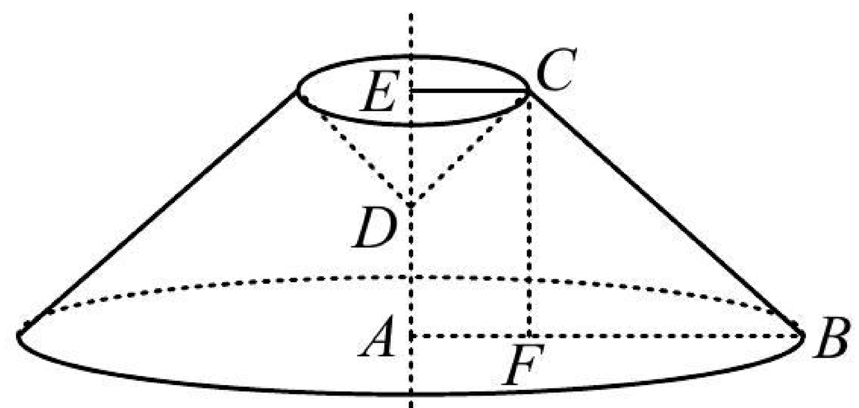
由题意，$\angle CDE=180^{\circ}-\angle ADC=45^{\circ}$，所以 $CE=DE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CD=1$，$AF=1$，$BF=AB-AF=2$，

$CF=AE=AD+DE=2$，$BC=\sqrt{CF^2+BF^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

图中圆 A 的面积为 $S_1=\pi\times 3^2=9\pi$，圆台的侧面积 $S_2=\pi(CE+AB)\cdot BC=\pi(3+1)\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}\pi$，

上方挖去的圆锥的侧面积 $S_3=\pi\cdot CE\cdot CD=\sqrt{2}\pi$，故所求表面积为 $S_1+S_2+S_3=(9+9\sqrt{2})\pi$.

答案：C

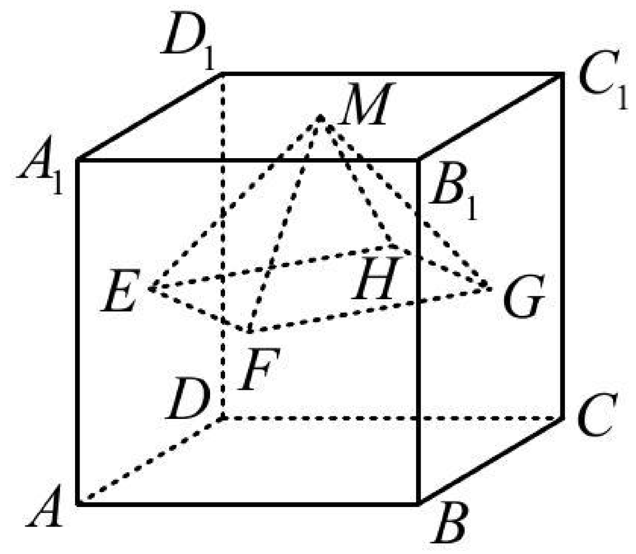


【总结】对于组合体，不管是求表面积还是体积，都只需弄清楚它的组成方式，再分别计算即可.

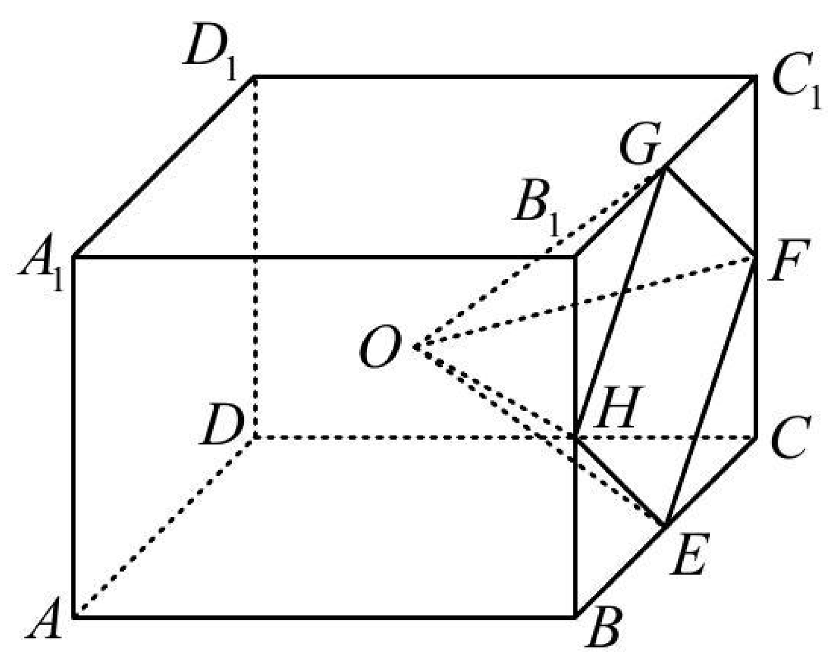
强化训练

1．（2022 • 上海卷 • ★）已知圆柱的高为 4，底面积为 9π，则圆柱的侧面积为_____.

2．（2018・天津卷・★★）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，除面 $ABCD$ 外，该正方体其余各面的中心分别为点 E，F，G，H，M（如图），则四棱锥 $M-EFGH$ 的体积为_____.

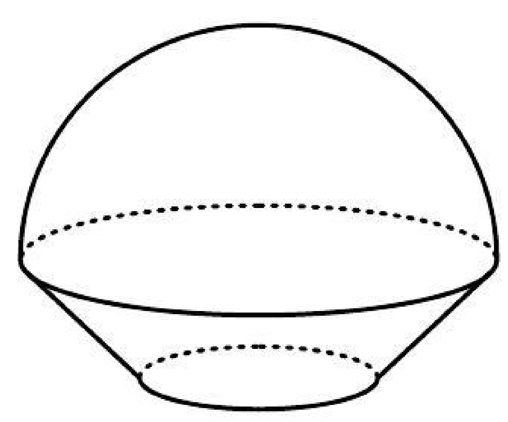


3．（2019・新课标III卷・★★）学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型，如图，该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 后所得的几何体，其中 O 为长方体的中心，E，F，G，H 分别为所在棱的中点，$AB=BC=6\,\text{cm}$，$AA_1=4\,\text{cm}$，3D 打印所用的材料密度为 0.9g/cm^3，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为_____g.



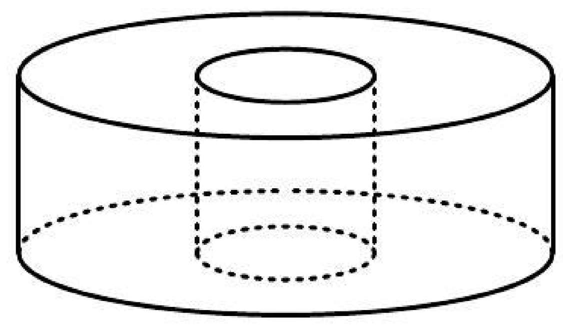
4．（2023・福建莆田二模・★★）某校科技社利用 3D 打印技术制作实心模型，如图，该模型的上部分是半球，下部分是圆台，其中半球的体积为 $144\pi\,\text{cm}^3$，圆台的上底面半径及高均是下底面半径的一半，打印所用原料密度为 1.5g/cm^3，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量约为（　　）（$1.5\pi\approx 4.7$）

（A）3045.6g　　（B）1565.1g　　（C）972.9g　　（D）296.1g



5.（2023 • 湖北武汉模拟 • ★★）某车间需要对一个圆柱形工件进行加工，该工件底面半径为 15cm，高 10cm，加工方法为在底面中心处打一个半径为 $r$cm 的且和原工件有相同轴的圆柱形通孔，如图，若要求工件加工后的表面积最大，则 r 的值应设计为（　　）

（A）$\sqrt{10}$　　（B）$\sqrt{15}$　　（C）4　　（D）5



6.（2023 • 新高考 II 卷 • ★★）底面边长为 4 的正四棱锥被平行于其底面的平面所截，截去一个底面边长为 2，高为 3 的正四棱锥，所得棱台的体积为_____.

7.（2021 • 新高考 II 卷改编 • ★★★）正四棱台的上、下底面的边长分别为 2，4，侧棱长为 2，则其体积为_____；侧面积为_____.

8.（2022 • 天津模拟 • ★★★）两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π，侧面积分别为 S_1 和 S_2，体积分别为 V_1 和 V_2，若 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{2}$，则 $\frac{V_1}{V_2}=$（　　）

（A）$\frac{3\sqrt{21}}{7}$　　（B）$\frac{2\sqrt{21}}{7}$　　（C）$\frac{9}{4}$　　（D）$\frac{4\sqrt{21}}{21}$